

Radon变换及在层析术中的应用

——根据Harrison H. Barrett教授讲学记录整理

Radon变换是某些光学现象的理论基础，是奥地利数学家J·Radon于1917年提出的，但是直到近十几年Radon变换才得到实际应用。Radon变换是医学层析术的理论基础，当然作为一种数学工具，Radon变换并不仅限于层析术，它可以用于多种领域里。

一、Radon变换

Radon变换用一个易懂的词来讲就是投影。比如，有一个平面物体，我们可以用一个二维分布函数来表示。当然也可以把这个二维物体沿某一方向做线积分而化为一维问题，即把二维问题化为一维的投影。这样就减少了一个维度，同样对于三维问题，我们可以把它分为一系列的截面，然后对每一个截面做一维投影，这样，三维问题也可以划为一维问题。

Radon变换理解为投影，而Radon逆变换就可理解为从投影恢复原物。Radon变换的实际操作就是用X射线通过物体，这就是层析术中所用的方法。所以，我们先来研究一下X射线通过物体的衰减规律。

假定有一束X射线射入具有一定衰减性质的物质薄层上，通过薄层后，有一部分散射掉，有一部分被薄层吸收，剩下的被接收器接收（图1）。我们把这个由强变弱的现象叫作衰减。设X射线直接射到接收器上时的强度为 I ，通过吸收介质后总的吸收为 dI ，则：

$$\frac{dI}{I} = -\mu dx$$

其中 μ 为吸收系数。当 μ 为常数时，

$$I = I_0 e^{-\mu x}$$

这就是Beer定律。如果 μ 是空间位置的函数的话，那么：

$$I = I_0 e^{-\int \mu(r) dr}$$

这个方程就和Radon变换发生了联系，因为这里也包含函数沿某条线的积分。普通X射线透视就符合这个公式，这个方法从上世纪末就开始使用了。

下面，让我们来看看这个方法存在什么问题。一个严重的问题是，由于病变（如瘤子）和正常组织的吸收系数相差很小，所以，得到的X射线照片的反差太小。假定正常组织的吸收系数为 μ_0 （图2），厚度为 L ，瘤子的吸收系数为 $\mu = \mu_0 + \Delta\mu$ ，几何直径为 D ，那么，X射线通过正常组织和通过有病变的组织后所对应的强度分别为：

$$I = I_0 e^{-\mu_0 L}$$

$$I - \Delta I = I_0 e^{-\mu_0(L-D)} \cdot e^{-(\mu_0 + \Delta\mu)D}$$

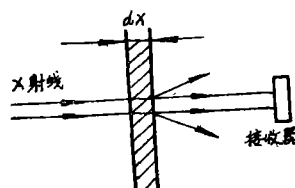


图1 x射线通过物质薄层的衰减作用

$$= I e^{-\Delta \mu D}$$

$$\approx I (L - \Delta \mu D)$$

所以, $\frac{\Delta I}{I} = \Delta \mu D$ 。

如果 $\frac{\Delta \mu}{\mu} = 1\%$, $\mu = 0.2 \text{ cm}^{-1}$, $D = 0.2 \text{ cm}$,

则 $\Delta I/I = (0.01)(0.2)(0.2) = 4 \times 10^{-4}$ 。
 低于 4% 的反差, 人眼就无法分辨了, 所以用普通 X 光照相就无法发现瘤子。

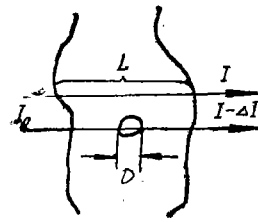


图 2 推导 X 射线照片反差的示意图

即使反差问题解决了, 还存在着另一个问题。假定在某一个层上有字母 A 和周围的衰减系数不同, 这样, 在象面上就产生了 A 的象 (图 3)。如果 X 光通过多层平面物体, 则象面上

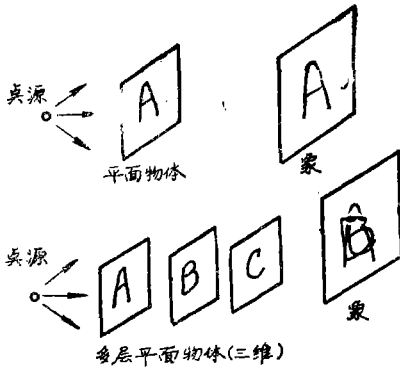


图 3 多层平面物体对 X 射线成象的影响

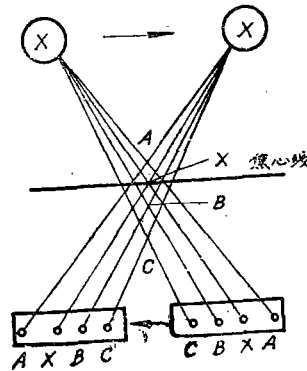


图 4 30 年代的层析术

同时把不同物面上的信息全部记录下来, 因而就分不清不同面上的信息。这个问题已存在很久了。下面, 我们介绍一下人们是怎样逐步解决它的。图 (4) 所示的是 30 年代发明的一种层析技术, 叫做线性运动层析。工作时光源向右移动, 胶片向左移动, X 点保持不动, 通过 X 点的线为焦心线。运动时, 只有焦心线上的点能成清晰的象, 其他位置上点的象由于运动而变模糊了, 用这种方法可以确定瘤子的位置。但是, 它也存在一个问题, 即不在焦心线上的象并没有除掉, 这样, 反差较小的部分还要被淹没在背景中, 这个问题直到 70 年代初计算层析出现后才得到解决。下面我们介绍计算层析的数学原理。

首先, 我们给投影下一个定义: 假定一平面物体的吸收系数为 $\mu(r)$, 用强度为 I_0 的平行光照射这个物体, 则 $\frac{I}{I_0}$ 和 P 的关系如图 (5) a 所示, 取对数并反号则变为图 (5) b 的形状, 我们就把这条曲线定义为物体在 ϕ 角下的一维投影:

$$\lambda_{\phi(P)} = \ln\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

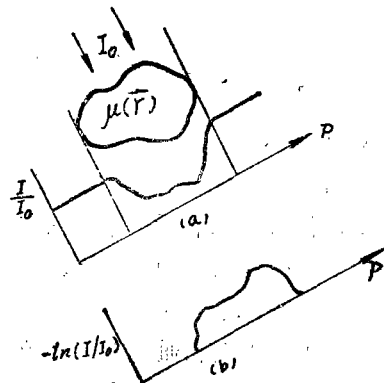


图 5 二维函数的一维投影示意图

由于 $I = I_0 e^{-\int \mu dl}$,

所以 $\lambda_{\phi}(p) = \int \mu dl$

即, 投影就是 μ 沿 l 的积分。对于每一个确定的 ϕ 角, 可以得到一条曲线, 我们的目的就是如何从一组曲线来求原物 $\mu(\vec{r})$ 。下面, 我们再详细地说明一下它们的几何关系 (图 6)。设有二维物体, 固定在 $x-y$ 平面内, 其分布为 $f(\vec{r})$ 。我们还可以用转动坐标 $x'-y'$ 表示它。因此, 物体沿 y' 方向的投影可表示为:

$$\begin{aligned} \lambda_{\phi}(p) &= \int f(\vec{r}) dy' = \iint f(\vec{r}) \delta(p - \vec{r} \cdot \hat{n}) d^2r \\ &= R_2 \{ f(\vec{r}) \}, \end{aligned}$$

R_2 表示二维 Radon 变换。

于是, 计算层析的目的, 就在于用二维的 Radon 逆变换反推出原来的物函数 $f(\vec{r})$ 。下面, 我们推导一些数学关系。

$$\begin{aligned} \mu(\vec{r}) &= \mu(x, y) \\ &= \mu_r(x', y') \end{aligned}$$

($\mu_r(x', y')$ 表示在转动坐标下的吸收函数)。

它的付氏变换为:

$$\begin{aligned} M(\vec{p}) &= M(\xi, \eta) \\ &= F_2 \{ \mu(\vec{r}) \} \\ &= \int d^2r \mu(\vec{r}) e^{-2\pi i \vec{p} \cdot \vec{r}} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \mu(x, y) e^{-2\pi i (\xi x + \eta y)} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx' \int_{-\infty}^{\infty} dy' \mu_r(x', y') e^{-2\pi i (\xi' x' + \eta' y')} \end{aligned}$$

其中 F_2 表示二维付氏变换;

$$\vec{p} = (\xi, \eta) = (\xi', \eta'),$$

$$\vec{r} = (x, y) = (x', y'),$$

(r 表示转动坐标)

假定固定 ϕ 角, 则 $\lambda_{\phi}(P)$ 是一维函数, 其付氏变换为:

$$A_{\phi}(\nu) = F_1 \{ \lambda_{\phi}(P) \} = \int_{-\infty}^{\infty} dp \lambda_{\phi}(p) e^{-2\pi i p \nu}.$$

在转动坐标系里, λ_{ϕ} 可表示为:

$$\lambda_{\phi}(p) = \int_{-\infty}^{\infty} \mu(\vec{r}) dy'.$$

又: $P = x'$,

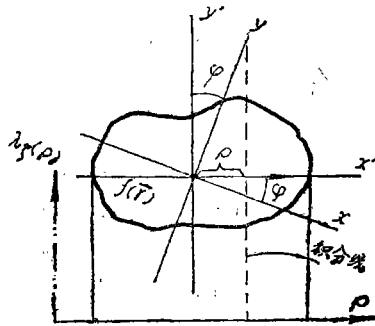


图 6 计算投影示意图

$$\begin{aligned} \text{所以: } \lambda_\phi(\gamma) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx' \int_{-\infty}^{\infty} dy' e^{-2\pi i \nu x'} \mu(\vec{r}) \\ &= M_r(\xi', \eta') \Big|_{\xi' = \nu, \eta' = 0} \end{aligned}$$

就是说： λ_ϕ 的一维付氏变换和 $\mu(\vec{r})$ 的二维付氏变换后令 $\eta' = 0$ 的结果相同。这样，就引出了一个非常有用的定理——中心切片定理（Central-slice-theory）或投影切片定理（Projection-slice-theory）。这个定理告诉我们，如果 λ_ϕ 是 $f(\vec{r})$ 在 ϕ 角下的一维投影，那么， $\lambda_\phi(p)$ 的付氏变换就等于 $f(\vec{r})$ 的二维付氏变换在 ξ' 上的值，即在和 ξ 成 ϕ 角上的直线上的值，可用算符表示如下：

$$\begin{aligned} \lambda_\phi &= R_2 \{f(\vec{r})\} \\ F_1\{\lambda_\phi(p)\} &= F_2\{f(\vec{r})\} \end{aligned}$$

所以

$$F_1\{R_2\} = F_2$$

即对二维Radon变换进行一维付氏变换，就等于二维付氏变换。每确定一个 ϕ 角，对应一个 $\lambda_\phi(P)$ ，对它进行一维付氏变换，就等于 $f(\vec{r})$ 的二维付氏变换在一条线上的值。这样，改变投影方向就对应 $f(\vec{r})$ 频谱面上不同方向的值。如果投影方向连续变化一周，就全部确定了 $f(\vec{r})$ 的频谱。然后，对 $f(\vec{r})$ 的谱进行逆变换，就确定了 $f(\vec{r})$ 。

那么，怎样用各个不同角度下的 $\lambda_\phi(P)$ 值综合出我们需要的 $\mu(\vec{r})$ 呢？我们可用“返回投影”的方法解决这个问题。所谓“返回投影”就是把得到的一维函数沿和 P 垂直的方向平移，这样就变成了二维函数。为了形象说明这个问题，我们假定物是由两个小块组

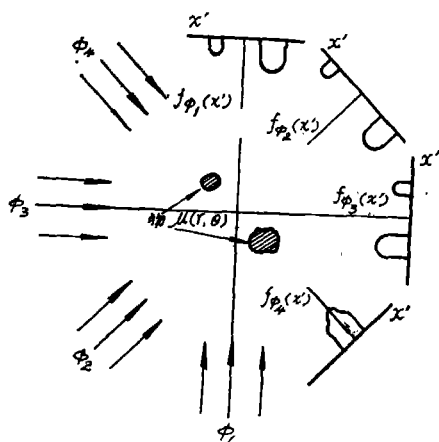


图7 物的不同方向投影

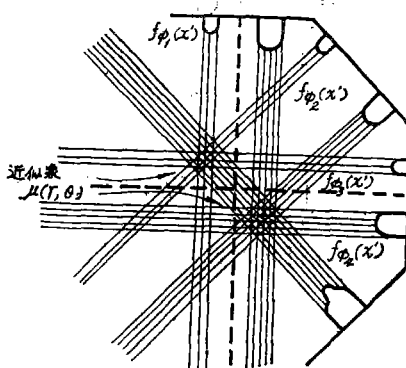


图8 返回投影示意图

成，它的各方向投影如图7所示，如果把各方向的投影沿原来的投影方向平移（图8），就组成了所谓的“合象”。显然合象并不是原物的理想象。下面，我们推导一下“合象”和原物之间的关系。设在 ϕ 角下的返回投影为：

$$g_\phi^*(x', y') = \lambda_\phi(P) \Big|_{x' = P}$$

$g_\phi^*(x', y')$ 是一个一维函数，为方便计我们把它看成是在 $y' = 0$ 条件下的二维函数。把不同 ϕ 角下的返回投影叠加起来，就成了“合象” $b(\vec{r})$ ：

$$b(\vec{r}) = \sum_i g_{\varphi_i} \quad (\vec{r}) = \sum_i \lambda_{\varphi_i} (\vec{r} \cdot \hat{n}_i)$$

如果 φ 是连续变化的话, 合象就是 λ_{φ} 的积分:

$$b(\vec{r}) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} d\varphi \lambda_{\varphi} (\vec{r} \cdot \hat{n})$$

为了说明上式的意义, 我们令 $\mu(\vec{r})$ 是一个 δ 函数:

$$\mu(\vec{r}) = \mu^{\delta}(\vec{r}) = \delta(\vec{r})$$

则:

$$\lambda_{\varphi}(P) = \int d^2 r \delta(\vec{r}) \delta(P - \vec{r} \cdot \hat{n}) = \delta(P)$$

其返回投影为:

$$b^{\delta}(\vec{r}) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} d\varphi \delta(\vec{r} \cdot \hat{n}) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} d\varphi \delta[r \cos(\theta - \varphi)]$$

由于 $\delta[f(x)] = \frac{\delta(x - x_0)}{\left| \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_0}}$

其中 $f(x_0) = 0, f'(x_0) \neq 0$

经过运算可得:

$$b^{\delta}(\vec{r}) = \frac{1}{\pi r}$$

对于一般的物分布, 经过投影, 返回投影, 其上每一点都对应一个 $\frac{1}{\pi r}$ 的分布, 所以, 整

个返回投影就相当于物和 $\frac{1}{\pi r}$ 的卷积:

$$b(\vec{r}) = \mu(\vec{r}) * * \frac{1}{\pi r} \quad (* * \text{表示二维卷积})$$

对 $b(\vec{r})$ 和 $\mu(\vec{r})$ 分别进行付氏变换得:

$$B(\vec{P}) = F_2\{b(\vec{r})\}$$

$$M(\vec{P}) = F_2\{\mu(\vec{r})\}$$

又:

$$\frac{1}{P} = F_2\left\{\frac{1}{r}\right\}$$

所以 $B(\vec{P}) = M(\vec{P}) \frac{1}{MP}$

$$M(\vec{P}) = \pi P B(\vec{P})$$

对 $M(\vec{P})$ 进行付氏逆变换, 就得到了原物分布 $\mu(\vec{r})$:

$$\mu(\vec{r}) = F_2^{-1}\left\{\pi P B(\vec{P})\right\}$$

下面，我们来研究一下 πP 这个滤波函数。 πP 是一个线性函数，所以，物理上无法实现这样滤波，我们在 πP 上乘以一个变迹函数 $A(\vec{P})$ 使实际的滤波函数为图 (9) 所示的形状。

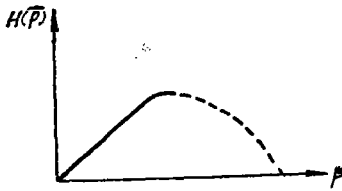


图9 实际的滤波函数

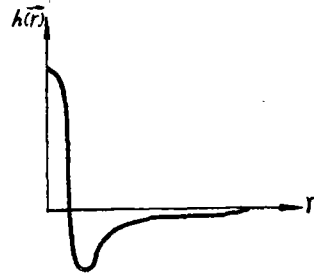


图10 $h(\vec{r})$ 的形状

状。 $A(\vec{P})$ 的设计取决于实际的需要，比如，按如何降低噪声，如何包含足够的分辨率等等来设计。如果 $A(P)$ 下降很快，则噪声较低，但分辨率也较差；反过来，分辨率高了，但噪声也大了。

$H(P)$ 是频域的函数，其空间坐标函数 $h(\vec{r})$ 形状如图 (10) 所示，由于滤波函数是中心对称的，所以整个图形呈图 (11) 所示的形状。

现在，可以把上面所讲的内容总结一下：

设物分布为 $\mu(\vec{r})$ ，这是我们所要求的量，为此，首先作投影或 Radon 变换，得到一维

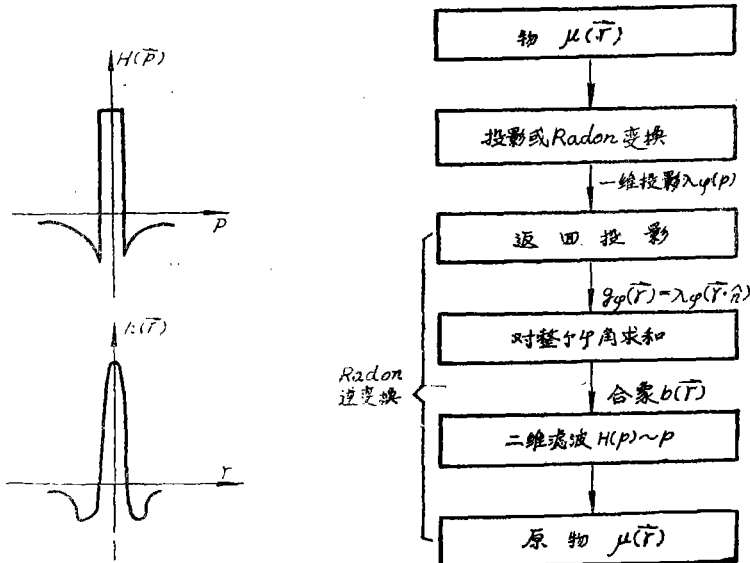


图11 中心对称时 $H(\vec{P})$ 和 $h(\vec{r})$ 的形状

函数 $\lambda_\phi(P)$ ，然后把 $\lambda_\phi(P)$ 返回投影得 $g_\phi(\vec{r})$ ，把各角度下的 $g_\phi(\vec{r})$ 叠加起来得“合象 $b(\vec{r})$ ”，这是一个二维函数，再对 $b(\vec{r})$ 在频率空间用 $H(\vec{P})$ 滤波，就得到了物分布 $\mu(\vec{r})$ ，其中返回投影以后的部分称为 Radon 逆变换，整个过程可用方块图表示如上；由于返回投影求合象，滤波是线性的，我们即可以按：

取对数→返回投影→求合→滤波（二维）的顺序来进行，也可以按：

取对数→滤波（1维）→返回投影→求合的顺序进行。这两种方式的滤波方式不同，第二种情况，取对数后是一维函数。所以是一维滤波，反之，第一种情况是二维滤波。

二、用于层析术的非相干光学处理机

下面要讲的是，对于上述的整个运算，怎样用一个光学装置来实现。图（12）是记录物的一维投影的示意图，点X射线源发出的X射线，经过两个金属平板准直后射向物体，然后投射到感光屏上，为简单起见，设X射线为平行的射线束，投射到屏上成一条直线，物为立在圆盘上的三个柱，其中B、C在同一直径上，A、B两点到中心的距离相等，但有一个

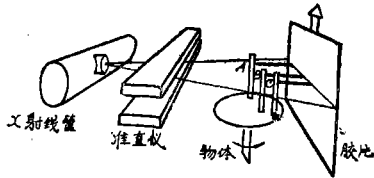


图12 记录物的一维投影的装置

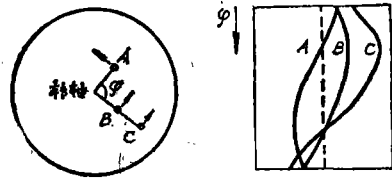


图13 物和它的正弦图

夹角 φ (图13)。盘子可绕中心转动，记录时，盘子绕轴匀速转动，屏匀速向上平移，这样，在屏上就记录了三条正弦曲线，其中A、B形成的正弦曲线振幅相同，但位相不同，B、C的正弦曲线位相一样，但振幅不同，如果物是由很多点构成的，则每一点都对应一条正弦曲线，所以整个图形就叫正弦图 (sinogram)。形成正弦图的过程就是 Radon 变换。

下面要做的工作就是如何用这个正弦图得到物的分布 $\mu(\vec{r})$ ，也就是如何做解码的工作。通常的解码工作都是用计算机来完成的，但是，近年来，我们光学中心研制出光学装置来完成解码工作。其中有一种解码装置叫作环形处理机图（14），这是一种非相干光处理机。非相干光源经过毛玻璃成为面光源。正弦图处理后贴在毛玻璃上，经过透镜成像。象面上放

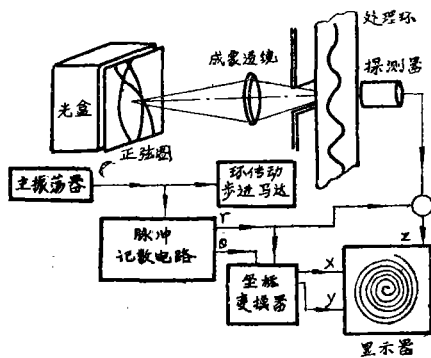


图14 环形处理机

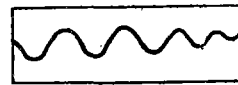


图15 用于解码的环形带

一个特制的环形带，其形状如图（15）所示。曲线部分透明，形状为正弦形，周期与正弦图上的周期相同，但振幅从零逐渐增加，整个长度有1—2百个周期。当把环形带放到象面上时，只有通过环形带的光才能达到光电倍增管上。对于其中的一小段，可以认为是振幅不变的。图（16）表示正弦图在环形带上所成的象。当环形带移动时，某一时刻正弦图上总有一条曲线恰好和环形带上的曲线重合，而其他曲线只能有一小部分透过环形带，这样光电倍增管上就能记录下一系列强度不同的信息，通过显示器显示出来。由于振幅是从零开始增加的，所以显示器上实际上是一组螺旋线，其亮暗由光电倍增管上输出信号控制。这样，就完成了返回投影和求合象的过程。但是，有一点需要说明，上面所述的过程没有包括滤波，所以比较模糊。

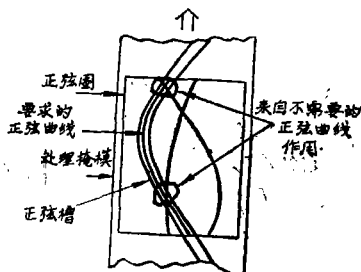


图16 正弦曲线在环形带上的象

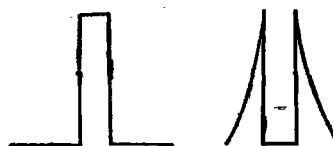


图17 实际的滤波函数

我们知道，滤波函数在空间域里包括有正负值。用非相干光滤波，其滤波函数只能是正值。要解决这个问题，我们把滤波函数化为两部分，其形状如图（17）所示。采用双通道系统，每个通道对应一个滤波器，然后把输出信号用电子学方法相减，就得到需要的结果了。但是，实现这个过程也是很困难的，我们是借助于光学传函综合的方法来解决这个问题的。

三、光学传函综合

光学传递函数是光瞳函数的归化自相关：

$$OTF(\vec{P}) = \frac{Hinc(\vec{P})}{Hinc(0)}$$

$$= \frac{\int d^2 p_0 p(\vec{p}_0 + \frac{1}{2}\vec{P}) p^*(\vec{p}_0 - \frac{1}{2}\vec{P})}{\int d^2 p_0 |p(\vec{p}_0)|^2}$$

就是说，如果知道了瞳函数，就能计算出光学传函，所谓光学传函综合，就是已知光学传函，求产生这种传函的瞳函数，根据上节的滤波要求，我们要得到的传函形如图（18）所示，就是说零频时输出也是零。输出随频率线性增加，这实际上是不可能的，我们用二个可实现的传函的差来得到。

假定瞳函数是一个 Ronchi 光栅（图19A），它的自相关形如图（19B）所示。如果去掉 Ronchi 栅，则光瞳的传递函数形如图（19C）所示，它的截止频率较高，如果把这两个传函相

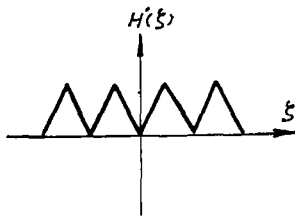


图18 综合传函

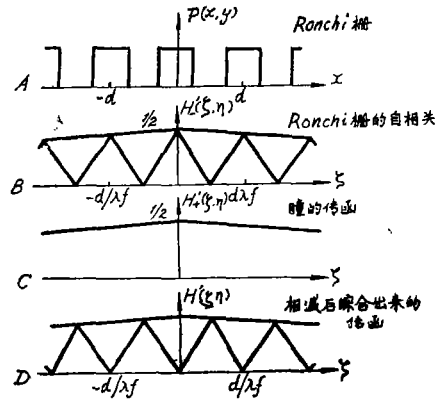


图19. 用Ronchi 栅综合传函的原理图

减, 就得到如图 (19D) 所示的传函。由于环形带的透明曲线有一定的宽度, 也对应一定的传函或点扩散函数, 其形状也是中间为零, 两边线性增加。

综合过程可通过图 (20) 所示的圆盘来实现, 这个圆盘分为四个等分, 其中两部分透明, 两部分刻有等间距的圆环, 它相当于Ronchi 栅。当圆盘绕中心转动时, 透明部分和

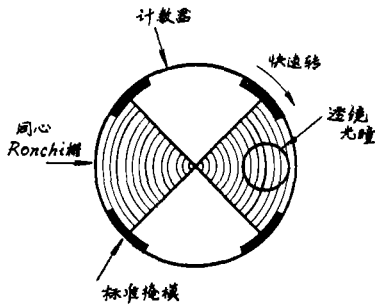


图20 用来实现传函综合的圆盘

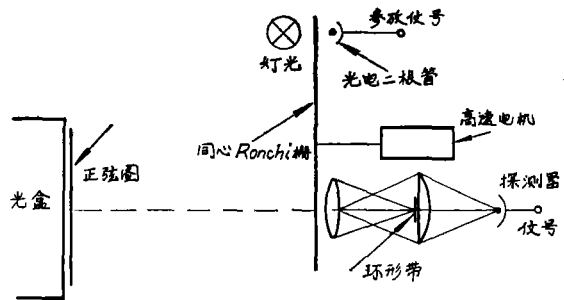


图21 非相干光学处理机

Ronchi栅相间地通过光瞳, 图 (21) 为整机示意图。为了保证整个系统同步, 在圆盘的边缘做了四个对称的黑带, 用来产生参考信号, 后面的电子学系统是一个锁相装置, 它和 Ronchi 栅出现的频率同步。用这个装置 就能完成了返回投影, 滤波和求合象的过程。

周万治、唐祝洲 整理